FONCTIONS RECI PROQUES

CH4 TOME I

EX 1 :

1) f(x)=1-4x I=$]-\infty,1]$ $f'(x)=-4<0$

f est continue et strictement décroissante sur I

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left[f(1),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=[-3,+\infty[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow 1-4y=x \Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{4}$

$d'où \quad f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}(1-x)$

2) $f(x)=x^2-4x+1$ $I=[2,+\infty[$

$f'(x)=2x-4=2(x-2)\geq 0 \ \forall x\in I$

f est continue et strictement croissante sur I=$[2,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left[f(2),\lim_{+\infty} f\right[=[-3,+\infty[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow y^2-4y+1=x \Leftrightarrow y^2-4y+(1-x)=0$

$\Delta'=4-(1-x)=3+x\geq 0$

$y_1=2-\sqrt{3+x}$ et $y_2=2+\sqrt{3+x}$

or $y\in[2,+\infty[\rightarrow y\geq 2$

d'où $f^{-1}(x)=2+\sqrt{3+x}$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $I=]-1,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$

f est continue et strictement croissante sur I=$]-1,+\infty[$

d'où f est une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left]\lim_{(-1)^+} f,\lim_{+\infty} f\right[=]-\infty,2[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \dfrac{2y-1}{y+1}=x \Leftrightarrow 2y-1=xy+x \Leftrightarrow y=\dfrac{1+x}{2-x}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$

4) $f(x)=\sqrt{x-3}+x$ I=$[3,+\infty[$

f est dérivable sur $]3,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}+1>0$

f est continue et strictement croissante sur I=$[3,+$

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

J=$\left[f(3),\lim_{+\infty} f\right[=[3,+\infty[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y-3}+y=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y-3}=x-y \Leftrightarrow y-3=x^2-2xy+y^2$

$\Leftrightarrow y^2-(2x+1)y+(x^2+3)=0$

$\Delta=(2x+1)^2-4(x^2+3)$

$\Delta=4x-11\geq 0$

$y'=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x-11}}{2}$

$y''=\dfrac{2x+1+\sqrt{4x-11}}{2}$

$f(3)=3 \Rightarrow f^{-1}(3)=3$

pour $x=3 \xrightarrow[\text{à rejeter}]{} y''=4$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x-11}}{2}$

EX 2 :

$g(x)=ax+b$; $a\neq 0$

1) *1er cas: a>0 g'(x)=a>0

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$f(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty} f,\lim_{+\infty} f\right[=\mathbb{R}$

* 2éme cas: a<0 g'(x)=a<0

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

d'où g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$g(\mathbb{R})=\left]\lim_{+\infty} g,\lim_{-\infty} g\right[=\mathbb{R}$

2) $y=g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow ay+b=x$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$ $Donc \quad g^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn